Note sui Diagrammi di Bode

Versione 1.2.0
http://escher07.altervista.org

Per calcolare il diagramma di Bode di una funzione occorre prima trovarne zeri e poli nel dominio s e quindi ridursi ad una forma come questa:

$$G(s) = K \frac{s^Z (s-\alpha)(s-z_0)(s-z_0^*)}{s^P (s-\beta)(s-p_0)(s-p_0^*)}$$

..dove Z e P sono naturali (in genere si semplifica e si pone N=Z-P con N che può essere positivo, nullo o negativo).

Insieme a questa forma può essere utile anche calcolarsi quella normalizzata della risposta in frequenza coi seguenti passi:

- sostituzione di s=jω
- portare fuori i fattori moltiplicativi in modo che tutti i termini abbiano coefficiente di grado zero unitario

Ottenendo in pratica quanto segue:

$$G(j\omega) = \mu \frac{j\omega^Z (1 \pm j\omega T_Z)(1 \pm j\omega A_Z \pm B_Z \omega^2)}{j\omega^P (1 \pm j\omega T_P)(1 \pm j\omega A_P \pm B_P \omega^2)}$$

Questa è una funzione complessa di variabile reale di cui di possono calcolare modulo e fase come:

$$M(\omega) = 20 \log |G(j\omega)|$$

$$\Phi(\omega) = Atg \frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)}$$

Queste due funzioni possono essere approssimate da delle spezzate : si parla così di diagrammi asintotici del modulo e della fase.

Questi possono essere costruiti a partire dagli zeri e dai poli con un procedimento basato essenzialmente sul principio di sovrapposizione per cui il modulo totale (in dB) e la fase totale (in Gradi o Radianti) è la somma dei moduli/fasi di tutte le singolarità nell'intero range di frequenze di analisi, considerate come singole.

Da notare che un accorgimento che risulta spesso utile per far prima a tracciare "a occhio" i diagrammi è quello di ordinare le singolarità per frequenza caratteristica (f_n, vedi di seguito). Questo accorgimento non ha in pratica alcuna utilità in una implementazione al calcolatore.

Per scrivere i singoli diagrammi sono utili le seguenti regole:

Tipo Radice	Variazione di Pendenza / dec
Zero Reale	+20dB * Molteplicità
Zero Complesso	+40dB * Molteplicità
Polo Reale	-20dB * Molteplicità
Polo Complesso	-40dB * Molteplicità

Tabella 1

Tipo Radice	Plim : Fase per f→∞
Zero Reale	+90° * Molteplicità
Zero Complesso	+180° * Molteplicità * Sgn(-a)
Polo Reale	-90 * Molteplicità
Polo Complesso	-180° * Molteplicità * Sgn(-a)

Tabella 2

Tipo Radice	Pini : Fase per f→0
Zero Reale	0 se a<=0 180* Molteplicità se a>0
Zero Complesso	0
Polo Reale	0 se a<=0 180* Molteplicità se a>0
Polo Complesso	0

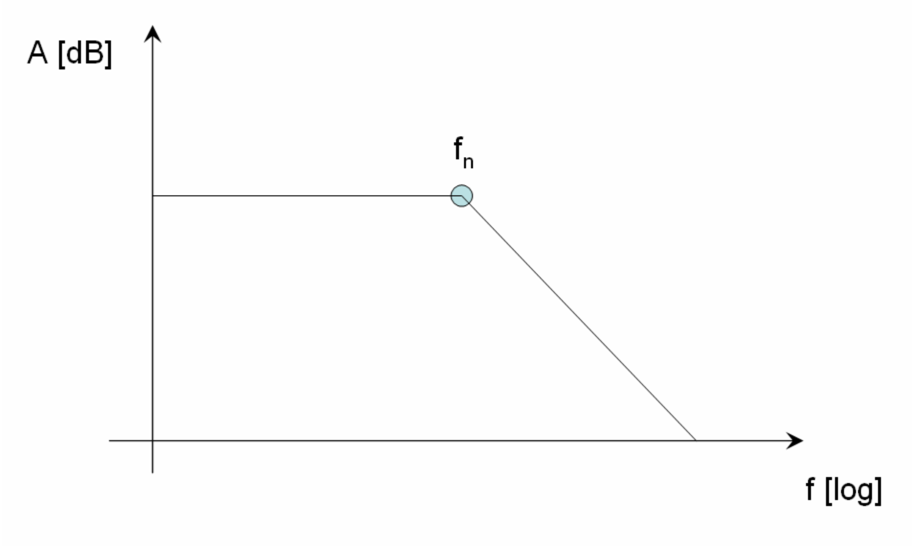
Tabella 3

...dove Sgn() è la nota funzione segno con output -1 se l'argomento è negativo o +1 altrimenti.

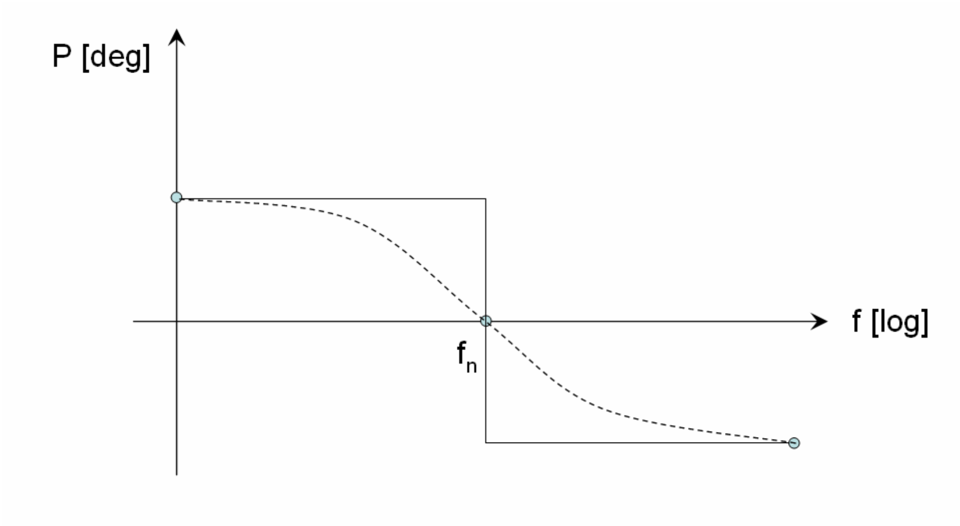
Il diagramma asintotico del modulo è una spezzata che è costante e pari a 0dB fino alla frequenza di taglio:

$$f_n = \frac{|a + jb|}{2\pi}$$

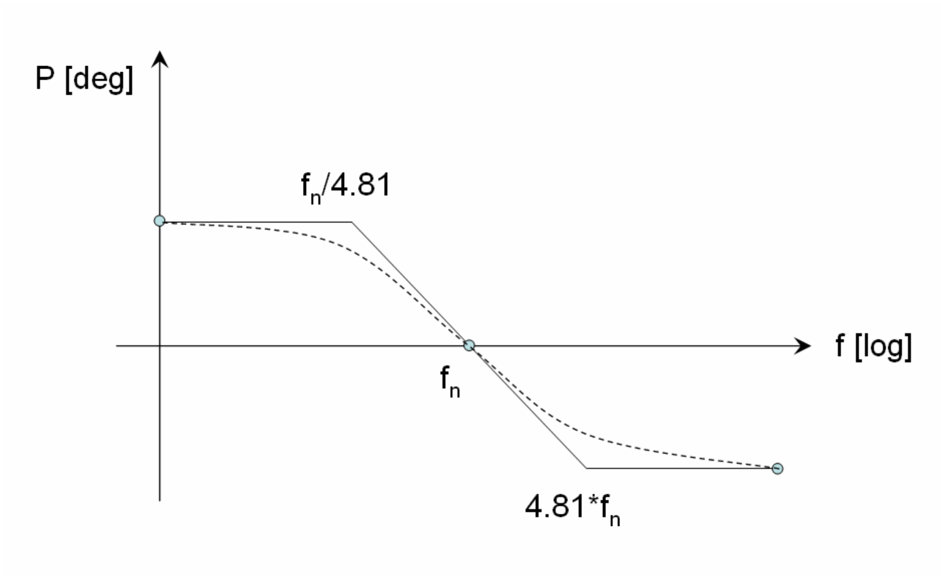
dove z=a+jb è la singolarità in questione e successivamente procede in modo lineare per decade del rapporto f/fn, ovvero si presenta così:



Il diagramma asintotico della fase, valutati i punti estremi con le regole di cui sopra viene ottenuto raffinando tale rappresentazione con la “regola del 4.81”. In pratica se questo è il diagramma di fase di prima approssimazione :



Si ottiene il diagramma asintotico della fase come segue:



Nel caso di singolarità complesse (coniugate) il fattore 4,81 viene generalizzato all'espressione $(4,81)^{\delta}$ dove:

$$\partial = \frac{|a|}{|a + jb|}$$

Abbiamo che δ è sempre compreso fra 0 (caso immaginario puro) e 1 (caso di radice reale). Si può verificare che i diagrammi asintotici di modulo dei fattori di secondo grado dovuti a coppie di radici complesse coniugate, per $\delta \rightarrow 0$ hanno errore che tende ad infinito in corrispondenza della f_n. Questo non accade invece nei diagrammi della fase.